# Предисловие 14

I	I Основы 23		
		Введ	ение 24
1		<b>Роль</b> 1.1 1.2	алгоритмов в вычислениях $26$ Что такое алгоритмы $26$ Алгоритмы как технология $32$
2		2.1	ступаем к изучению 38 Сортировка вставкой 38 Анализ алгоритмов 45 Разработка алгоритмов 52
3		<b>Рост</b> 3.1 3.2	<b>функций</b> $67$ Асимптотические обозначения $68$ Стандартные обозначения и часто встречающиеся функции $78$
4	*	4.1 4.2 4.3 4.4 4.5	еляй и властвуй 90 Задача поиска максимального подмассива 93 Алгоритм Штрассена для умножения матриц 100 Метод подстановки решения рекуррентных соотношений 108 Метод деревьев рекурсии 113 Основной метод 119 Доказательство основной теоремы 123
5	*	<b>Bepo</b> 5.1 5.2 5.3 5.4	ятностный анализ и рандомизированные алгоритмы 140 Задача о найме 140 Индикаторная случайная величина 144 Рандомизированные алгоритмы 148 Вероятностный анализ и дальнейшее применение индикаторных случайных величин 156

173

<b>Вредение</b>	174
квепение	1/4

II

# 6 Пирамидальная сортировка 179

- 6.1 Пирамиды 179
- 6.2 Поддержка свойства пирамиды 182

Сортировка и порядковая статистика

- 6.3 Построение пирамиды 185
- 6.4 Алгоритм пирамидальной сортировки 188
- 6.5 Очереди с приоритетами 190

#### 7 Быстрая сортировка 198

- 7.1 Описание быстрой сортировки 198
- 7.2 Производительность быстрой сортировки 202
- 7.3 Рандомизированная быстрая сортировка 207
- 7.4 Анализ быстрой сортировки 208

#### 8 Сортировка за линейное время 220

- 8.1 Нижние границы для алгоритмов сортировки 220
- 8.2 Сортировка подсчетом 223
- 8.3 Поразрядная сортировка 226
- 8.4 Карманная сортировка 230

#### 9 Медианы и порядковые статистики 243

- 9.1 Минимум и максимум 244
- 9.2 Выбор в течение линейного ожидаемого времени 245
- 9.3 Алгоритм выбора с линейным временем работы в наихудшем случае 250

### III Структуры данных 259

#### Введение 260

#### 10 Элементарные структуры данных 264

- 10.1 Стеки и очереди *264*
- 10.2 Связанные списки *268*
- 10.3 Реализация указателей и объектов 273
- 10.4 Представление корневых деревьев 277

#### 11 Хеширование и хеш-таблицы 285

- 11.1 Таблицы с прямой адресацией 286
- 11.2 Xеш-таблицы *288*
- 11.3 Xеш-функции *294*
- 11.4 Открытая адресация 302
- $\star$  11.5 Идеальное хеширование *310*

Бинарные деревья поиска 319

*	12.2 12.3	Что такое бинарное дерево поиска 319 Работа с бинарным деревом поиска 322 Вставка и удаление 327 Случайное построение бинарных деревьев поиска 332		
13		Красно-черные деревья 341		
		Свойства красно-черных деревьев 341		
		Повороты 345 Вставка 348		
		Удаление <i>356</i>		
14	Расширение структур данных 372			
		Динамические порядковые статистики 372		
		Расширение структур данных 378		
	14.3	Деревья отрезков 381		
IV	Усов	вершенствованные методы разработки и анализа 389		
	Введ	ение 390		
15		амическое программирование 392		
15	15.1	Разрезание стержня 393		
15	15.1 15.2	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403		
15	15.1 15.2 15.3	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412		
15	15.1 15.2 15.3 15.4	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424		
	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431		
<ul><li>15</li><li>16</li></ul>	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 Жад	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448		
	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жа</b> д 16.1	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449		
	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жа</b> д 16.1 16.2	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457		
16	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463		
16	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3 16.4	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463 Матроиды и жадные методы 471		
16 * *	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463 Матроиды и жадные методы 471 Планирование заданий как матроид 479		
16	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 <b>Амо</b>	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463 Матроиды и жадные методы 471 Планирование заданий как матроид 479 ртизационный анализ 487		
16 * *	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 <b>Амо</b> ј 17.1	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463 Матроиды и жадные методы 471 Планирование заданий как матроид 479 ртизационный анализ 487 Групповой анализ 488		
16 * *	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 <b>Амо</b> ј 17.1 17.2	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463 Матроиды и жадные методы 471 Планирование заданий как матроид 479 ртизационный анализ 487 Групповой анализ 488 Метод бухгалтерского учета 492		
16 * *	15.1 15.2 15.3 15.4 15.5 <b>Жад</b> 16.1 16.2 16.3 16.4 16.5 <b>Амо</b> ј 17.1 17.2	Разрезание стержня 393 Перемножение цепочки матриц 403 Элементы динамического программирования 412 Наидлиннейшая общая подпоследовательность 424 Оптимальные бинарные деревья поиска 431 ные алгоритмы 448 Задача о выборе процессов 449 Элементы жадной стратегии 457 Коды Хаффмана 463 Матроиды и жадные методы 471 Планирование заданий как матроид 479 ртизационный анализ 487 Групповой анализ 488 Метод бухгалтерского учета 492 Метод потенциалов 495		

V	Сложные структуры данных 517
	Введение 518
18	<b>В-деревья</b> <i>521</i> 18.1 Определение В-деревьев <i>525</i> 18.2 Основные операции с В-деревьями <i>528</i> 18.3 Удаление ключа из В-дерева <i>536</i>
19	Фибоначчиевы пирамиды         542           19.1         Структура фибоначчиевых пирамид         544           19.2         Операции над объединяемыми пирамидами         547           19.3         Уменьшение ключа и удаление узла         555           19.4         Оценка максимальной степени         559
20	Деревья ван Эмде Боаса       568         20.1       Предварительные подходы       569         20.2       Рекурсивная структура       573         20.3       Дерево ван Эмде Боаса       582
<b>21</b> *	Структуры данных для непересекающихся множеств         597           21.1 Операции над непересекающимися множествами         597           21.2 Представление непересекающихся множеств с помощью связанных списков         600           21.3 Леса непересекающихся множеств         604           21.4 Анализ объединения по рангу со сжатием пути         608
VI	Алгоритмы для работы с графами 623
	Введение 624
22	Элементарные алгоритмы для работы с графами         626           22.1 Представление графов         626           22.2 Поиск в ширину         630           22.3 Поиск в глубину         639           22.4 Топологическая сортировка         649           22.5 Сильно связные компоненты         652
23	<b>Минимальные остовные деревья</b> <i>661</i> 23.1 Выращивание минимального остовного дерева <i>662</i> 23.2 Алгоритмы Крускала и Прима <i>667</i>
24	Кратчайшие пути из одной вершины 680 24.1 Алгоритм Беллмана—Форда 688 24.2 Кратчайшие пути из одной вершины в ориентированных ациклических графах 693 24.3 Алгоритм Дейкстры 696 24.4 Разностные ограничения и кратчайшие пути 702 24.5 Доказательства свойств кратчайших путей 709

## 25 Кратчайшие пути между всеми парами вершин 722 25.1 Задача о кратчайших путях и умножение матриц 724 25.2 Алгоритм Флойда-Уоршелла 731 25.3 Алгоритм Джонсона для разреженных графов 738 Задача о максимальном потоке 747 26.1 Транспортные сети 748 26.2 Метод Форда-Фалкерсона 753 26.3 Максимальное паросочетание 771 ★ 26.4 Алгоритмы проталкивания предпотока 775 ★ 26.5 Алгоритм "поднять-в-начало" 788 VII Избранные темы **80**7 808 Введение Многопоточные алгоритмы 811 27.1 Основы динамической многопоточности 813 27.2 Многопоточное умножение матриц 832 27.3 Многопоточная сортировка слиянием 836 Работа с матрицами 852 28 28.1 Решение систем линейных уравнений 852 28.2 Обращение матриц 866 28.3 Симметричные положительно определенные матрицы и метод наименьших квадратов 872 29 Линейное программирование 883 29.1 Стандартная и каноническая формы задачи линейного программирования 891 29.2 Формулировка задач в виде задач линейного программирования 899 29.3 Симплекс-алгоритм 905 29.4 Двойственность *921* 29.5 Начальное базисное допустимое решение 927

Полиномы и быстрое преобразование Фурье

30.1 Представление полиномов 942

30.3 Эффективные реализации БПФ 957

30.2 ДПФ и БПФ 949

30

Теоретико-числовые алгоритмы 968

A.2 Оценки сумм *1202* 

31.1 Элементарные понятия теории чисел 970

	31.2	Наибольший общий делитель 976		
		Модульная арифметика 982		
		Решение модульных линейных уравнений 990		
		Китайская теорема об остатках 994		
		Степени элемента 997		
		Криптосистема с открытым ключом RSA 1002		
*		Проверка простоты 1009		
		Целочисленное разложение 1021		
32	Поиск подстрок 1031			
-		Простейший алгоритм поиска подстрок 1034		
		Алгоритм Рабина-Карпа 1036		
		Поиск подстрок с помощью конечных автоматов 1041		
*		Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта 1048		
33		ислительная геометрия 1060		
33		Свойства отрезков 1061		
		Определение наличия пересекающихся отрезков 1068		
		Поиск выпуклой оболочки 1075		
		Поиск пары ближайших точек 1086		
24		-		
34		полнота 1096		
		Полиномиальное время 1102 Проверка за полиномиальное время 1110		
		1 1		
		NP-полнота и приводимость 1115 Доказательства NP-полноты 1127		
		NР-полные задачи 1136		
35	При	ближенные алгоритмы    1157		
35	При 35.1	<b>ближенные алгоритмы 1157</b> Задача о вершинном покрытии 1159		
35	При 35.1 35.2	<b>ближенные алгоритмы</b> 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163		
35	При 35.1 35.2 35.3	<b>ближенные алгоритмы</b> 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169		
35	При 35.1 35.2 35.3 35.4	ближенные алгоритмы 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169 Рандомизация и линейное программирование 1175		
35	При 35.1 35.2 35.3 35.4	<b>ближенные алгоритмы</b> 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169		
35 <i>VIII</i>	При 35.1 35.2 35.3 35.4 35.5	ближенные алгоритмы 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169 Рандомизация и линейное программирование 1175		
	При 35.1 35.2 35.3 35.4 35.5	ближенные алгоритмы 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169 Рандомизация и линейное программирование 1175 Задача о сумме подмножества 1180		
	При 35.1 35.2 35.3 35.4 35.5 Пр	Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169 Рандомизация и линейное программирование 1175 Задача о сумме подмножества 1180  риложения: математические основы 1195 цение 1196		
	При 35.1 35.2 35.3 35.4 35.5 Пр	ближенные алгоритмы 1157 Задача о вершинном покрытии 1159 Задача о коммивояжере 1163 Задача о покрытии множества 1169 Рандомизация и линейное программирование 1175 Задача о сумме подмножества 1180		

31

D	MIHO	жества и прочие художества 1210
	Б.1	Множества 1210
	Б.2	Отношения 1215
	Б.3	Функции 1218
	Б.4	Графы 1221
	Б.5	Деревья <i>1226</i>
В	Комб	бинаторика и теория вероятности 1235
	B.1	Основы комбинаторики 1235
	B.2	Вероятность 1241
	B.3	Дискретные случайные величины 1248
	B.4	Геометрическое и биномиальное распределения 1254
*	B.5	Хвосты биномиального распределения 1260
Γ	Матј	рицы 1269
	Γ.1	Матрицы и матричные операции 1269
	Γ.2	Основные свойства матриц 1274

Литература 1282

Предметный указатель 1299